

(12×3 p.) I. A minimumkövetelményből.

1. Mit jelent, hogy egy $f : A \rightarrow B$ függvény bijektív?

(Dom $f = A$), Ran $f = B$ és f injektív, azaz $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$

2. Mit jelent, hogy egy A halmaz megszámlálhatóan végtelen?

Nem véges és az elemei felsorolhatók egy sorozatban, tehát $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

3. Hogyan definiáltuk az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz szuprénumát?

$\sup A = c$, ha c a legkisebb olyan szám, amelyre $\forall a \in A$ esetén $a \leq c$

4. Mit jelent, hogy egy $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja?

$\forall \varepsilon > 0$ esetén $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ végtelen halmaz

5. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat. Definiálja a $\limsup a_n$ mennyiséget.

A részsorozatok határértékei között $n \rightarrow \infty$ legnagyobb (IR $\cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ belüli) érték

6. Írja le a sorozatokra vonatkozó Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt.

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

7. Írja le a sorok konvergenciára vonatkozó Mertens-tételt.

$\sum a_n, \sum b_n$ konvergens, legalább egyikük abszolút konv. $\Rightarrow \sum a_n \sum b_n$ Cauchy-sorozat is konvergens és $\sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$. Ha mindkettő is abszolút konvergens, akkor $\sum c_n$ is az.

8. Mit jelent, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathbb{R}$ pontban?

$a \in \text{Dom } f$ és $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy $|x - a| < \delta, x \in \text{Dom } f$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

9. Mit jelent, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$ -en?

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

10. Mit jelent, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban?

Lejött és véges a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték (és f értelmezett a egy környezetében)

11. Írja le az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény $[a, b]$ intervallum $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ felosztásához tartozó alsó közelítő összegét.

$$S_{\phi} f = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x_i, x_{i+1}} f \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

12. Írja le a Rolle-féle középérték tételt.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, diffható (a, b) -n, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists a < c < b$, hogy $f'(c) = 0$

II. Igaz vagy Hamis? Az állítás előtti I vagy H betűt karikázza be annak $(15 \times 3 p.)$ megfelelően, hogy az állítás igaz vagy hamis.

1. I ☒ H Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat korlátos, akkor Cauchy-sorozat.
2. I ☒ H Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor is konvergens.
3. I ☒ H Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ sor is konvergens, ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos.
4. I ☒ H Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ sor is konvergens, ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(0) = 0$.
5. ☒ I H Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor Cauchy-sorozat.
6. ☒ I H $e^{tx_1 + (1-t)x_2} \leq t e^{x_1} + (1-t) e^{x_2}$ teljesül minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $t \in [0, 1]$ esetén.
7. ☒ I H Egy korlátos függvény alsó integrálközelítő összege sohasem nagyobb, mint a felső közelítő összege.
8. ☒ I H Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos sorozat, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ sor konvergens.
9. ☒ I H Ha egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható, akkor f' folytonos.
10. I ☒ H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$
11. ☒ I H Minden A, B halmazra, valamint minden $a, b \in A \cap B$ elemre $(a, b) \in (A \cap B) \times A$ teljesül.
12. I ☒ H Ha $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény, akkor az $f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ függvényre $f'(x) = \varphi(x)$ teljesül.
13. ☒ I H Ha $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ teljesül.
14. I ☒ H Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\arcsin \sin x = x$.
15. I ☒ H Monoton csökkenő függvény oszcillációs összege lehet negatív.

(10 p.) **III. Bizonyítás.** Bizonyítsa be, hogy ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatból képzett $\sum_n a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

$\sum |a_n|$ konvergens $\Rightarrow$ teljesül rá a Cauchy-kritérium:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n \geq N - \text{re} \quad \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$$

De akkor $\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$, ezért a Cauchy-kritérium a $\sum a_n$ sora is teljesül $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens $\square$

Másik bír:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

$\sum 2|a_n|$ konvergens $\Rightarrow \sum (a_n + |a_n|)$ konvergens.

Ebből levonva a ^{majoráns} ^{kritérium} $\sum |a_n|$ konvergens sat, azt kapjuk,

hogy $\sum a_n$ is konvergens $\square$